ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ′ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. A. 1. σελ. 225 σχολικού βιβλίου
   2. σελ. 303 σχολικού βιβλίου

   B. α. Σ, σελ.98 σχολικού βιβλίου
   β. Λ, σελ. 230 σχολικού βιβλίου
   γ. Σ, σελ. 235 σχολικού βιβλίου
   δ. Λ, πρέπει να έχει *το πολύ* μια λύση
   ε. Λ, σελ. 334 σχολικού βιβλίου

2. α. Η συνάρτηση $k(x) = 1$ είναι παραγωγίσιμη ως σταθερή, η $g(x) = e^x$ ως εκθετική και η $h(x) = x + 1$ ως πολυωνυμική.

   Η συνάρτηση $(k + g)(x) = 1 + e^x$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων k και g, η $(g \circ h)(x) = e^{x+1}$ ειναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων g και h, ενώ η $(k+(g\circ h))(x) = 1+e^{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων k και $g \circ h$ Τέλος, η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $k+g$ και $k + (g \circ h)$:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (1 + e^{x+1}) - e^{x+1} \cdot (1 + e^x)}{(1 + e^{x+1})^2} = \frac{e^x \cdot (1 - e)}{(1 + e^{x+1})^2} < 0.$$

   Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

   β. Είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{f(x)}\,dx &= \int \frac{1+e^{x+1}}{1+e^x}dx = \int \frac{1-e}{1+e^x}dx + \int \frac{e+e^{x+1}}{1+e^x}dx \\ &= (e-1)\int \frac{-1}{1+e^x}dx + e\int dx \\ &\overset{\star}{=} (e-1)\cdot \ln\left(e^{-x}+1\right) + e\cdot x + c\ ,\ \ c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

   Η ισότητα $\star$ προκύπτει ως εξής: θέτουμε $u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}dx$ και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I_1 = \int \frac{-1}{1+e^x}dx = \int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = \int \frac{1}{u+1}du = \ln\left(u+1\right) + c_1$$
$$= \ln\left(e^{-x}+1\right) + c_1\ ,\ \ c_1 \in \mathbb{R}.$$

γ. Αν $x < 0$ τότε

$$5^x > 6^x \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(5^x) < f(6^x) \ (1)$$

και

$$7^x > 8^x \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(7^x) < f(8^x). \ (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει ότι $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$.

3. α.

$$\begin{aligned}(4-z)^{10} = z^{10} \Rightarrow |4-z|^{10} = |z|^{10} &\Rightarrow |4-z|^2 = |z|^2 \\ &\Rightarrow (4-z)\cdot(4-\overline{z}) = z\cdot\overline{z} \\ &\Rightarrow 16 - 4\cdot\overline{z} - 4\cdot z + z\cdot\overline{z} = z\overline{z} \\ &\Rightarrow z + \overline{z} = 4 \Rightarrow 2\cdot Re(z) = 4 \Rightarrow Re(z) = 2.\end{aligned}$$

Άρα η εικόνα των z ανήκουν στην $x = 2$.

β. $i.$ Είναι $f(x) = x^2 + x + \alpha$, $f'(x) = 2\cdot x + 1$, $x_0 = 2$, $y_0 = -3$.

$$f(2) = -3 \Rightarrow 4 + 2 + \alpha = -3 \Rightarrow a = -9$$

$$f'(2) = 2\cdot 2 + 1 = 5$$

$$(\varepsilon) \quad y + 3 = 5\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = 5\cdot x - 13.$$

$ii.$ Είναι $f''(x) = 2 > 0$, άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω. Δηλαδή η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε). Άρα

$$\begin{aligned}E &= \int_{\frac{3}{5}}^{2} |f(x) - (5\cdot x - 13)| dx = \int_{\frac{3}{5}}^{2} [f(x) - (5\cdot x - 13)] dx \\ &= \int_{\frac{3}{5}}^{2} (x^2 + x - 9 - 5x + 13) dx = \int_{\frac{3}{5}}^{2} (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}\cdot x^3 - 2\cdot x^2 + 4\cdot x\right]_{\frac{3}{5}}^{2} = \text{... τ.μ.}\end{aligned}$$

4. α. $i.$ Θεωρώ την

$$\begin{aligned}g(x) &= \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

με πεδίο ορισμού $D_g = (0, +\infty)$ και

$$g'(x) = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x+1} > 0.$$

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, όμως

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x} \right] = \ln(1+0) - 0 = 0 - 0 = 0,$$

δηλαδή

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \ (1)$$

$ii.$ Είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - \ln x - \frac{x+1}{x} \\ &= \ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1} - 1 - \frac{1}{x} \\ &= \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Όμως λόγω της (1) θα είναι $\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} < 0$. Επιπλέον,

$$x > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{x+1} < 0. \ (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $f'(x) < 0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

β. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{De l'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1. \end{aligned}$$

γ. Αρκεί να δειχτεί ότι η

$$\begin{aligned} (x+1)^x = x^{x+1} &\Leftrightarrow x \cdot \ln(x+1) = (x+1) \cdot \ln x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \cdot \ln(x+1) - (x+1) \cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ (3) \end{aligned}$$

έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [2,3] κι επιπλέον

$$f(2) = 2 \cdot \ln 3 - 3 \cdot \ln 2 = \ln 9 - \ln 8 > 0$$

$$f(3) = 3 \cdot \ln 4 - 4 \cdot \ln 3 = \ln 64 - \ln 81 < 0,$$

δηλαδή $f(2) \cdot f(3) < 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η (3) έχει λύση $x_0 \in (2, 3)$.
Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, η λύση αυτή είναι μοναδική.